CHAPITRE V

FORMULES DE TAYLOR

Une fonction f qui est 1-fois dérivable en un point x_0 peut être approchée dans un voisinage de ce point par un polynôme P_1 de degré 1. En effet :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\,\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et $P_1(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Question : Peut-on approcher une fonction n fois dérivable en un point x_0 par un polynôme de degré n ?

1) Formule de Taylor avec reste de Lagrange :

Lemme :

Soit une fonction $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $g^{(n)}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. t On suppose :

$$g(a) = g^{(1)}(a) = g^{(2)}(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = g(b) = 0.$$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$.

Démonstration : On va appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle .$g(a) = g(b) = 0$. Donc il existe $c_1 \in]a,b[$ telque $g'(c_1)=0$. $g'(a) = g'(c_1) = 0$. Il existe $c_2 \in]a,c_1[$ tel que $g''(c_2)=0$.Et ainsi de suite jusqu'à l'ordre n: Il existe $c_n \in]a,c_{n-1}[$ tel que $g^{(n)}(c_n) = 0$.

$g^{(n)}(a) = g^{(n)}(c_n) = 0$. donc il existe $c_{n+1} \in]a,c_n[\subset]a,b[$ tel que $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. On prend $c = c_{n+1}$.

ETUSUP .com

Théorème : **(Formule de Taylor-Lagrange)**

Soit $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f^{(n)}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

C'est la formule de Taylor Lagrange. Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)}f^{(n+1)}(c)$ s'appelle "reste de lagrange".

Démonstration :

On pose $g(x)=f(x)-[f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}A]$

où $A \in \mathbb{R}$.

Par hypothèse $g^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus $g(a)= 0$. On va choisir A de sorte que $g(b)= 0$, c'es-à-dire :

(*) $g(b)=f(b)-[f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A]= 0.$

Pour $1\leq p\leq n$:

$$g^{(p)}(x)=f^{(p)}(x)-[f^{(p)}(a)+\frac{x-a}{1!}f^{(p+1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(p+2)}(a)+$$

$$+\dots+\frac{(x-a)^{n-p}}{(n-p)!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1-p}}{(n+1-p)!}A\ ].$$

On vérifie que $g^{(p)}(a) = 0$, $\forall\ p \in \{1,\dots,n\}$. Donc $g(a) = g'(a) =\dots=g^{(n)}(a) = g(b)= 0$. D'après le lemme précédent il existe $c \in]a,b[$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0 = f^{(n+1)}(c) - A$. D'où $A = f^{(n+1)}(c)$. On remplace A par sa valeur dans (*) et on obtient la formule desirée.

ETUSUP .com

Corollaire : *Soit $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f^{(n)}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$ avec $x \neq x_0$, il existe un nombre c strictement compris entre x_0 et x tel que :*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur $[x_0,x]$ ou $[x,x_0]$ selon que $x > x_0$ ou $x < x_0$.

Remarques :

- Le nombre c de la formule dépend de x. On peut aussi l'écrire sous la forme $c = \theta x + (1-\theta)x_0$ avec $0 < \theta < 1$.
- Si on pose $x = x_0+h$, la formule précédente devient:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

2) **Formule de Maclaurin avec reste de Lagrange** :

On l'obtient en gardant les mêmes hypothèses du corollaire précédent et en prenant $x_0 = 0$. On a :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$ avec c compris strictement entre 0 et x .

Exemple : $f(x)= \sin x$; $n = 5$; $x_0 = 0$

On a:

$$\sin x= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}(-\sin c).$$ (à vérifier)

ETUSUP .com

Alors simplement.

1000 1880

3) Formule de Taylor avec reste de Young :

Lemme: Soit $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in [a,b]$). Alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Le théorème suivant va donner la réponse à notre question de départ:

Théorème : (Formule de Taylor-Young)

Soient $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. On suppose que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon(x) \text{ avec}$$

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$$

Démonstration :

On pose $g(x)=f(x)-[f(x_0)+\dfrac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\ldots+\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)]$ (*)

On vérifie que $g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0$. D'après le lemme précédent $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{(x-x_0)^n}=0$. Donc $g(x)=(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

On remplace g par sa valeur dans (*) et on obtient la formule du théorème.

4) Formule de Maclaurin-young :

On l'obtient en gardant les mêmes hypothèses du théorème précédent et en prenant $x_0 = 0$. On a :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^n\varepsilon(x) \text{ avec}$$

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..